

Haton de la Goupillière, Julien Napoléon
Mémoires divers

HATON DE LA GOUPILLIÈRE

MÉMOIRES DIVERS.

SECONDE ÉDITION.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1909

HATON DE LA GOUPILLIÈRE

MEMBRE DE L'INSTITUT,
INSPECTEUR GÉNÉRAL DES MINES,
GRAND-OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR.

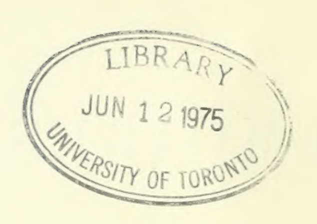
MÉMOIRES DIVERS.

SECONDE ÉDITION.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1909



DE

LA COURBE

QUI EST SA PROPRE PODAIRE.

1. Je me propose ici de trouver une courbe qui soit à elle-même sa propre podaire, ou, pour prendre le problème sous un point de vue plus général, celle qui a pour podaire une ligne semblable à elle-même et tournée d'un certain angle autour du pôle. Nous pouvons d'ailleurs nous borner aux podaires orthogonales, puisque toute podaire oblique est de son côté semblable à la podaire orthogonale et déviée d'un certain angle.

Nous obtiendrons par cela même la solution de cette autre question : Trouver une ligne telle, qu'en la faisant rouler sur une courbe égale, elle engendre par quelque point de son plan une ligne semblable, tournée d'un certain angle autour du point qui correspond dans la courbe fixe au point décrivant du profil mobile.

En d'autres termes encore : Trouver une courbe telle, qu'elle ait pour anticaustique par réflexion une ligne semblable déviée d'un certain angle autour du foyer lumineux.

Remarquons enfin que, si ce contour se trouve employé dans une machine comme excentrique pour manœuvrer un cadre, il jouira, et jouira seul, de la propriété de le conduire de la même manière dans les deux positions, très différentes en général au point de vue de la loi du

mouvement, pour lesquelles le cadre est perpendiculaire à son plan ou circonscrit à la courbe dans son plan même ([1]).

2. Nous devons d'abord mettre à part une première solution évidente, qui est la ligne droite. Elle répond en effet à la rigueur des termes de l'énoncé, et pour un pôle quelconque ; car le pied des perpendiculaires abaissées sur toutes les tangentes se trouve sur la ligne elle-même, et satisfait par suite à une équation identique. Mais il est clair en même temps que cette solution ne remplit pas l'objet que nous avons en vue.

3. Si la courbe cherchée a pour podaire une ligne semblable, on peut dire également que celle dont elle est la podaire lui est semblable, et prendre le problème sous ce point de vue inverse. Désignons donc par

$$r = f(\theta)$$

la courbe inconnue, et cherchons celle dont elle est la podaire. Il faudra pour cela, par l'extrémité du rayon vecteur r, élever la perpendiculaire

$$r' \cos(\theta' - \theta) = r,$$

et prendre l'enveloppe de cette droite ; ce qui se fera en éliminant θ entre cette formule et son équation dérivée par rapport à θ, c'est-à-dire entre les deux relations

$$r' \cos(\theta' - \theta) = f(\theta),$$
$$r' \sin(\theta' - \theta) = f'(\theta).$$

Le résultat de cette élimination devra être

$$r' = m f(\theta' + \mu),$$

en désignant par m et μ deux constantes arbitraires.

Ainsi donc la question revient à déterminer la fonction f de manière

---

([1]) HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Traité des Mécanismes*, p. 88.

à satisfaire au système

$$(1)\qquad \begin{cases} m f(\theta'+\mu)\cos(\theta'-\theta)=f(\theta), \\ m f(\theta'+\mu)\sin(\theta'-\theta)=f'(\theta), \end{cases}$$

qui est au fond celui de *deux équations simultanées aux différences mêlées,* et mêlées même d'une manière plus compliquée qu'à l'ordinaire; car θ y désigne une fonction inconnue de θ' subordonnée à la principale fonction inconnue f, au lieu de figurer comme à l'ordinaire d'une manière distincte dans les formules.

4. La première donne par la différentiation

$$m f'(\theta'+\mu)\cos(\theta'-\theta) - m f(\theta'+\mu)\sin(\theta'-\theta)\left(1-\frac{d\theta}{d\theta'}\right)=f'(\theta)\frac{d\theta}{d\theta'};$$

mais on a, d'après la seconde,

$$m f(\theta'+\mu)\sin(\theta'-\theta)\frac{d\theta}{d\theta'}=f'(\theta)\frac{d\theta}{d\theta'}.$$

Si l'on retranche, m disparaît et il reste

$$f'(\theta'+\mu)\cos(\theta'-\theta)=f(\theta'+\mu)\sin(\theta'-\theta).$$

On a de même, en multipliant en croix les relations (1),

$$f'(\theta)\cos(\theta'-\theta)=f(\theta)\sin(\theta'-\theta).$$

On déduit de ces deux dernières formules

$$(2)\qquad \operatorname{tang}(\theta'-\theta)=\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}=\frac{f'(\theta'+\mu)}{f(\theta'+\mu)}.$$

Si nous étions autorisés à considérer θ et θ' comme deux valeurs absolument quelconques, cette équation entraînerait la suivante,

$$\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}=\text{const.},$$

et conduirait immédiatement à la détermination de la fonction f. Mais une telle affirmation ne serait pas légitime en ce moment, car θ et θ' ne

sont pas indépendants. En effet, θ est l'azimut du pied de la perpendiculaire abaissée sur la tangente au point dont l'azimut est θ'. Il est donc une fonction de θ', inconnue à la vérité, mais déterminée.

5. Faisons, pour la désigner provisoirement,

$$\theta' = \varphi(\theta) - \mu; \tag{3}$$

les formules (2) deviendront

$$\operatorname{tang}[\varphi(\theta) - \theta - \mu] = \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \frac{f'[\varphi(\theta)]}{f[\varphi(\theta)]}.$$

Si dans cette relation, qui est maintenant une identité, nous remplaçons θ par $\varphi(\theta)$, elle donnera

$$\operatorname{tang}\{\varphi[\varphi(\theta)] - \varphi(\theta) - \mu\} = \frac{f'[\varphi(\theta)]}{f[\varphi(\theta)]} = \frac{f'\{\varphi[\varphi(\theta)]\}}{f\{\varphi[\varphi(\theta)]\}};$$

et comme ces deux couples d'égalités ont un membre commun

$$\operatorname{tang}\{\varphi[\varphi(\theta)] - \varphi(\theta) - \mu\} = \operatorname{tang}[\varphi(\theta) - \theta - \mu],$$

$$\{\varphi[\varphi(\theta)] - \varphi(\theta) - \mu\} = [\varphi(\theta) - \theta - \mu] + k\pi,$$

d'où enfin, μ disparaissant,

$$\varphi[\varphi(\theta)] - 2\varphi(\theta) + \theta = k\pi.$$

Mais cette équation doit encore perdre son second membre. On peut en effet l'écrire

$$[\theta - \varphi(\theta)] - \{\varphi(\theta) - \varphi[\varphi(\theta)]\} = k\pi.$$

Or $\varphi(\theta)$ représente $\theta' + \mu$ (3), et peut être remplacé par cette valeur dans la première parenthèse. Dans la seconde, envisageons $\varphi(\theta)$ comme l'azimut θ_1 d'un nouveau point M_1 de la podaire; $\varphi[\varphi(\theta)]$ ou $\varphi(\theta_1)$ représentera pareillement $\theta'_1 + \mu$, en désignant par θ'_1 l'azimut du point de contact de la tangente élevée perpendiculairement à l'extrémité du rayon r_1 de la podaire, de même que θ' est celui qu'on déduit

du premier point M. L'équation devient par là

$$[\theta-(\theta'-\mu)]-[\theta_1-(\theta'_1-\mu)]=k\pi,$$

et comme μ disparaît encore

$$(\theta-\theta')-(\theta_1-\theta'_1)=k\pi.$$

Or $\theta-\theta'$ et $\theta_1-\theta'_1$ sont, sauf leur signe qui peut être positif ou négatif, les angles, nécessairement aigus, du rayon vecteur et de la perpendiculaire à la tangente menée en son extrémité. Leur somme ou leur différence ne peut donc atteindre une demi-circonférence, et l'on doit avoir $k=0$. La relation qui détermine la fonction φ prend ainsi la forme définitive

$$\varphi[\varphi(\theta)]-2\varphi(\theta)+\theta=0. \tag{4}$$

6. Cette équation, d'une forme inusitée, revient au fond au problème suivant : *Déterminer une fonction telle, qu'entre elle et sa fonction inverse la moyenne arithmétique soit la variable elle-même.* Si, en effet, de la relation

$$x=\varphi(\theta)$$

on déduit

$$\theta=\psi(x),$$

la formule (4) pourra s'écrire de la manière suivante :

$$\varphi(x)+\psi(x)=2x.$$

Pour la résoudre, considérons une série de valeurs $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ de la variable fournies par les conditions

$$\theta_1=\varphi(\theta), \qquad \theta_2=\varphi(\theta_1)=\varphi[\varphi(\theta)], \qquad \theta_3=\varphi(\theta_2)=\varphi\{\varphi[\varphi(\theta)]\}, \qquad \ldots;$$

elles formeront aussi, comme on le voit, une série de valeurs de la fonction φ. L'équation (4) deviendra sous sa forme actuelle

$$\theta_2-2\theta_1+\theta=0.$$

et généralement, en y changeant successivement θ en $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n$,

$$\theta_{n+2} - 2\theta_{n+1} + \theta_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$\theta_{n+2} - \theta_{n+1} = \theta_{n+1} - \theta_n.$$

Cette série forme donc une progression arithmétique, et, comme elle appartient à la fois à la variable θ et à sa fonction φ, on voit qu'à une suite de valeurs de la variable en progression arithmétique de raison $\Delta\theta$ en correspond pour la fonction une autre, en progression arithmétique pareillement, avec une raison égale $\Delta\varphi$,

(5) $$\Delta\varphi = \Delta\theta,$$

d'où

$$\varphi(\theta) = \theta + c,$$

en désignant par c une constante arbitraire [1].

7. Si maintenant nous rendons à $\varphi(\theta)$ sa valeur (3)

$$\theta' + \mu = \theta + c,$$

il vient

(6) $$\theta' - \theta = \text{const.} = \alpha.$$

L'angle $\theta' - \theta$ du rayon vecteur et de la normale doit donc rester constant, ce qui est le caractère exclusif de la spirale logarithmique. Telle est, par suite, la solution la plus générale de la question proposée.

Comme on sait d'ailleurs que, pour cette courbe en particulier, toute ligne semblable est une spirale égale tournée d'un certain angle autour du pôle, on peut après coup réduire à une seule, par exemple à la

---

[1] La relation (5) étant une équation aux différences finies, à la vérité la plus simple de toutes, c devrait désigner une fonction périodique si $\Delta\theta$ était déterminé. Mais $\Delta\theta$, c'est-à-dire $\theta_1 - \theta$ ou $\varphi(\theta) - \theta$, est absolument quelconque, puisque θ reste arbitraire. Il faudrait donc que c eût une infinité de périodes, ce qui le réduit au rôle de constante.

seconde, les deux conditions qui lui sont imposées dans l'énoncé : d'être amplifiée dans le rapport de 1 à m, et tournée de l'angle μ.

8. Si l'on demande en particulier que la courbe soit à elle-même sa propre podaire, la solution ne devra être cherchée que dans le résultat précédent, et il suffira de faire en sorte que la quantité dont la spirale a tourné sur son pôle sans changer de forme soit nulle, ou égale à un nombre entier de circonférences.

Pour évaluer cette quantité, remontons à la valeur constante (6) de l'angle du rayon vecteur et de la normale

$$\frac{dr'}{r'\,d\theta'} = \operatorname{tang}\alpha,$$

$$\log r' = \theta' \operatorname{tang}\alpha + A,$$

$$r' = e^{\theta' \operatorname{tang}\alpha + A}.$$

Il est facile de voir que

$$r = r' \cos\alpha, \qquad \theta = \theta' + \alpha.$$

La podaire sera donc

$$r = e^{(\theta - \alpha)\operatorname{tang}\alpha + A} \cos\alpha,$$

ce qu'on peut écrire

$$r = e^{\left[\theta - \left(\alpha - \frac{\log\cos\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}\right)\right]\operatorname{tang}\alpha + A}.$$

L'angle de rotation a, par suite, pour valeur

$$\alpha - \frac{\log\cos\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

L'équation qui détermine α sera, d'après cela, en désignant par i un nombre entier quelconque positif ou négatif,

$$\alpha - \frac{\log\cos\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = 2i\pi.$$

Elle admet pour racines

$$\alpha = 2i\pi.$$

attendu que l'on a, en faisant disparaître l'indétermination

$$\frac{\log \cos 2i\pi}{\operatorname{tang} 2i\pi} = 0.$$

Mais nous ne devons employer ici que la racine qui correspond à $i = 0$

$$\alpha = 0,$$

car α est nécessairement un angle aigu. Cette solution indique que la normale se confond avec le rayon vecteur, ou que la spirale dégénère en un cercle.

Il ne saurait, du reste, exister d'autre solution. En effet, si nous faisons varier α de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ce qui suffit, ainsi que nous l'avons fait remarquer, la dérivée du premier membre qui se réduit, tout calcul fait, à

$$\frac{\log \cos \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

reste essentiellement positive. Le premier membre croît donc incessamment à partir de zéro, sans s'annuler de nouveau.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, 2ᵉ série, t. XI, p. [illegible].

TAUTOCHRONISME DES ÉPICYCLOÏDES

QUAND ON A ÉGARD AU FROTTEMENT.

On connaît depuis Huygens (*De Horologio oscillatorio*, P. II, prop. 25) le tautochronisme rigoureux de la cycloïde pour un point pesant. Newton étendit cette proposition (*Principes*, Livre II, prop. 26) au cas où l'on joindrait à la pesanteur la résistance d'un milieu en raison de la vitesse. Plus tard Necker montra (*Mémoires des Savants étrangers*, t. IV, 1763, p. 96) que la même propriété subsiste lorsqu'on a égard au frottement. Le tautochronisme a lieu alors par rapport au point où la tangente est inclinée sous l'angle de frottement. Ajoutons enfin que les trois forces peuvent être réunies ensemble sans troubler l'isochronisme. Le P. Jullien a fait voir de plus (*Problèmes de Mécanique*, t. I, p. 393) que cette combinaison constituait la solution la plus étendue renfermée dans la formule générale de Lagrange pour le tautochronisme (1), lorsqu'on envisage ensemble la pesanteur, le frottement et une résistance qui dépendent de la vitesse d'une manière indéterminée.

D'un autre côté, Newton avait déjà reconnu (*Principes*, Livre I,

(1) Cette formule, dont je parlerai plus loin, a été présentée par son auteur comme renfermant tous les cas possibles de tautochronisme; c'était à tort, et J. Bertrand a montré (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XII, 1847, p. 121) qu'elle est loin d'être aussi générale; mais elle n'en conserve pas moins un grand intérêt.

prop. 52) que l'épicycloïde possède elle-même la propriété du tautochronisme lorsque le mobile est sollicité par le centre du cercle fixe en raison de la distance. Mais, à ma connaissance, le parallèle en est resté là. J'ai cherché à le compléter, et je suis arrivé au théorème suivant :

L'épicycloïde est encore tautochrone pour des forces centrales attractives ou répulsives proportionnelles à la distance, lorsqu'on a égard au frottement. Le point d'isochronisme est alors celui dont le rayon vecteur fait avec la normale l'angle de frottement. Ce tautochronisme n'est pas troublé quand on introduit, en outre, une résistance proportionnelle à la vitesse.

Pour le démontrer, formons l'expression de la force tangentielle, en représentant par kr l'action attractive ou répulsive suivant le signe de k, par f le coefficient de frottement et par $\varphi(v)$ la résistance, que nous laisserons indéterminée jusqu'à nouvel ordre

$$S = kr\cos\mu - \varphi(v) - f\left(\frac{v^2}{\rho} + kr\sin\mu\right),$$

μ désignant l'angle du rayon vecteur avec la courbe. Or on trouve, en prenant l'arc pour variable indépendante

$$\cos\mu = \frac{dr}{ds},$$

$$\sin\mu = \sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}},$$

et

$$\rho = \frac{r\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}}{1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}}.$$

L'expression de la force tangentielle devient par là

$$(1)\qquad S = kr\frac{dr}{ds} - \varphi(v) - f\left(v^2\,\frac{1-\dfrac{dr^2}{ds^2} - r\dfrac{d^2 r}{ds^2}}{r\sqrt{1-\dfrac{dr^2}{ds^2}}} + kr\sqrt{1-\frac{dr^2}{ds^2}}\right).$$

La formule générale de Lagrange (*Mémoires de Berlin*, 1765) donne pour la force tangentielle capable de tautochronisme

$$(2)\qquad S = v\psi\left(\frac{v}{\xi}\right) - \frac{v^2}{\xi}\frac{d\xi}{ds},$$

ξ étant une fonction arbitraire de s, et ψ une expression quelconque formée avec $\frac{v}{\xi}$. Pour obtenir la solution la plus générale renfermée dans cette formule avec les hypothèses précédentes, il suffit de disposer de ces deux arbitraires et de la fonction r qui définit la courbe inconnue de manière à identifier les deux expressions. Je suivrai à cet égard une marche analogue à celle qui a été employée par J. Bertrand, et depuis par le P. Jullien.

L'expression (1) satisfait visiblement au caractère

$$\frac{d^4 S}{dv^4\,ds} = 0.$$

Imposons donc cette condition à la formule (2); il vient ainsi

$$\frac{v^2}{\xi^2}\psi^{\text{iv}}\left(\frac{v}{\xi}\right) + 6\frac{v}{\xi}\psi'''\left(\frac{v}{\xi}\right) + 6\psi''\left(\frac{v}{\xi}\right) = 0.$$

Cette équation a pour intégrale, avec quatre constantes arbitraires A, B, C, D

$$\psi\left(\frac{v}{\xi}\right) = A\frac{\xi}{v} - B + \frac{C}{A}\frac{v}{\xi} + D\log\frac{v}{\xi}.$$

Dès lors la relation (2) prend la forme plus explicite

$$(3)\qquad S = A\xi - Bv + \frac{v^2}{\xi}\left(\frac{C}{A} - \frac{d\xi}{ds}\right) + Dv\log\frac{v}{\xi}.$$

Nous pouvons maintenant identifier les expressions (1) et (3). En premier lieu, le terme $Dv \log \xi$ nous présente v au premier degré avec un coefficient qui contient s, ce qui n'existe pas dans la formule (1) et nous oblige à faire $D = 0$. La fonction (3) se trouve par là réduite à ses trois premiers termes, l'un indépendant de v, le second de s, le troisième les renfermant tous les deux. En envisageant dans l'expression (1) les trois parties correspondantes, nous aurons pour les fonctions de v seul

$$Bv = \xi v k,$$

pour les termes qui ne renferment que s

$$A\xi = kr\left(\frac{dr}{ds} - f\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}\right),$$

et enfin, pour la partie qui les contient tous les deux, v^2 disparaissant de lui-même

$$\frac{1}{\xi}\left(\frac{C}{s} - \frac{d\xi}{ds}\right) = f\frac{1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}}{r\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}}.$$

La première équation montre que la seule résistance admissible est proportionnelle à la vitesse. La seconde fournit la valeur de ξ; et, en la reportant dans la troisième, nous obtenons l'équation différentielle de la trajectoire

$$\frac{\frac{C}{k}\left(1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}\right) - \frac{f\frac{dr}{ds}}{\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}}\left(1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}\right)}{r\left(\frac{dr}{ds} - f\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}\right)} = f\frac{1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}}{r\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}},$$

ce qu'on peut écrire de la manière suivante

$$\left(\frac{C}{k} - 1\right)\left(1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}\right)\left[1 - \frac{f\frac{dr}{ds}}{\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}} - \frac{f\left(\frac{dr}{ds} - f\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}}\right] = 0.$$

ou encore

$$\left(\frac{C}{k}-1\right)+\left(1-\frac{dr^2}{ds^2}-r\frac{d^2r}{ds^2}\right)(1+f^2)=0,$$

et enfin

$$\frac{dr^2}{ds^2}+r\frac{d^2r}{ds^2}=\frac{\frac{C}{k}+f^2}{1+f^2}.$$

Cette forme que l'on pourrait facilement intégrer entre r et s, et même ensuite en coordonnées polaires entre r et θ, va nous suffire pour conclure sans qu'il soit nécessaire d'en développer l'intégration.

On voit, en effet, que le coefficient de résistance B a complètement disparu, et que l'existence ou la suppression du frottement n'influencent que la valeur de la constante, qui seule renferme le coefficient f. Or, C est arbitraire, ce qui montre que *la tautochrone des forces centrales proportionnelles à la distance est la même avec ou sans frottement, comme avec ou sans résistance proportionnelle à la vitesse.*

Cette courbe a d'ailleurs été déjà déterminée pour le cas où l'on n'a ni frottement ni résistance, par Puiseux (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IX, 1844, p. 415), lequel a obtenu les résultats suivants : si la force est répulsive, la tautochrone est toujours une épicycloïde extérieure; si elle est attractive, la courbe peut, suivant les valeurs respectives du coefficient d'attraction et du temps d'isochronisme, être une épicycloïde intérieure ou une certaine spirale qui a la propriété d'être semblable à la développée de sa développée.

Il reste à connaître l'extrémité commune des arcs isochrones. Remarquons à cet effet qu'elle ne saurait se trouver qu'en une position d'équilibre, puisqu'une oscillation infiniment petite doit exiger un temps fini pour se produire dans ses environs. *Ce sera donc, pour le cas actuel, au point où la force, c'est-à-dire le rayon vecteur, fait avec la normale l'angle de frottement.*

On peut se demander si le tautochronisme subsistera encore dans le mouvement en sens contraire, lorsqu'on imprimera au mobile à partir de ce point diverses impulsions initiales. Cette réciprocité,

évidente avec des liaisons théoriques, doit être constatée à part pour les questions de frottement. Il suffirait d'ailleurs à cet égard de changer dans le calcul les signes de f et de B. Or celui-ci a disparu, et l'autre ne figure qu'au carré dans la dernière équation. Les conclusions resteront donc les mêmes, et l'on voit que *l'isochronisme a encore lieu pour le mouvement inverse.*

(*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XIII, p. 204.)

DE

LA SIMILITUDE EN THERMOLOGIE.

---

1. On appelle *phénomènes semblables*, dans un ordre quelconque de faits, ceux pour lesquels tous les éléments, quelle que soit leur nature, se correspondent deux à deux en restant proportionnels. Les rapports fixes de similitude sont du reste spéciaux à chaque nature distincte d'éléments, et auront ordinairement des valeurs différentes. Mais il s'en faut de beaucoup en général que ces divers rapports puissent être tous assignés au hasard et indépendamment les uns des autres.

En Géométrie, par exemple, on rencontre : des angles, des longueurs, des surfaces et des volumes. Et si α, λ, σ, υ désignent les rapports de similitude des éléments de ces divers genres, les théories connues établissent qu'on a de toute nécessité

$$\alpha = 1, \qquad \sigma = \lambda^2, \qquad \upsilon = \lambda^3.$$

L'un des rapports, celui des angles, est donc déterminé et toujours égal à l'unité. De plus, parmi les trois autres, un seul reste arbitraire. Par conséquent, de même qu'il serait impossible de construire une figure qui présentât partout des angles doubles de tous les angles homologues de l'autre, de même il serait chimérique de chercher à réaliser à la fois, par exemple : des longueurs doubles, des surfaces triples et des volumes quadruples. Par cela seul que l'on aurait pris soin de reproduire des dimensions doubles, sans songer ni aux surfaces ni aux volumes, les premières se trouveraient nécessairement quadruples et

ceux-ci huit fois plus grands, quoi que l'on pût entreprendre pour s'y opposer.

Il existe des nécessités analogues en Dynamique, lorsqu'on veut reproduire à des échelles différentes un phénomène quelconque. Outre les quatre rapports précédents α, λ, σ, ν, que nous pouvons réduire par la pensée à λ, puisqu'un seul reste arbitraire, on rencontre en Mécanique ceux des temps, des forces et des masses, que je représenterai par θ, φ et μ. Newton a montré dans le *Livre des Principes* que les valeurs de ces rapports devaient être nécessairement subordonnées à la relation

$$\lambda\mu = \varphi\theta^2.$$

On pourra donc, si l'on veut, entreprendre de reproduire un phénomène proposé en y employant, par exemple, des longueurs doubles, des forces triples et des masses quadruples. Mais il sera alors indispensable d'envisager des intervalles de temps $\sqrt{\frac{8}{3}}$ ou 1,633... fois plus grands pour retrouver des états semblables; et ce serait une erreur fondamentale que de croire, soit au déroulement simultané de ces états successifs, soit à tout autre rapport fixe autre que $\sqrt{\frac{8}{3}}$ entre les durées qui les séparent dans l'une et l'autre expérience.

Les remarques précédentes, en ce qui concerne la Géométrie, sont familières à tous. Mais il n'en est malheureusement pas de même pour ces dernières observations relatives à la Mécanique, malgré les lumineuses explications données sur ce sujet par J. Bertrand (1). Tous les jours encore, un nombre considérable d'inventeurs et d'expérimentateurs s'exposent aux plus graves mécomptes pour les avoir méconnues.

On peut évidemment concevoir une étude analogue pour un ordre quelconque de considérations. Je m'attacherai ici à envisager sous ce rapport la théorie mathématique de la chaleur.

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, 32e Cahier, p. 189.

2. Cette science a pour objet immédiat les phénomènes de conductibilité dans un milieu cristallisé. La détermination numérique de toutes leurs circonstances réside entièrement dans deux équations différentielles partielles. L'une d'elles est du second ordre et s'étend à toute la masse du corps. L'autre, du premier ordre, est appelée *équation à la surface* et s'applique seulement aux points de la superficie, pour exprimer la loi particulière des flux qui la traversent.

On voit figurer dans ces relations les grandeurs suivantes. D'abord les dimensions géométriques et les temps, dont les rapports de similitude continueront à être désignés par λ et θ. En second lieu les densités D qui auront pour rapport de similitude, avec les notations précédentes, $\frac{\mu}{\lambda^3}$. En outre, comme quantités nouvelles : la température V (rapport de similitude τ), la chaleur spécifique Γ (rapport γ), la conductibilité q (rapport χ), le pouvoir émissif e de la surface (rapport ε). Nous avons enfin, outre la conductibilité *absolue* q, que l'on suppose devenir χ fois plus grande dans le nouveau milieu, à tenir compte de la variabilité de cette faculté suivant les diverses directions autour d'un point quelconque. On sait que cette variation est régie par la figure de l'ellipsoïde de conductibilité. Or, comme avant tout nous devons supposer la similitude dans l'ordre géométrique, il nous faut supposer que cet ellipsoïde reste le même (comme rapports d'axes, car sa grandeur absolue est sans influence). Nous conserverons donc dans les deux questions ses mêmes axes a, b, c. Quant aux cosinus m, n, p, qui caractérisent la direction envisagée, ils resteront aussi les mêmes, puisque la similitude géométrique exige l'égalité des angles homologues.

3. Avec ces notations, la température se détermine en fonction des coordonnées x, y, z et du temps t, par l'équation différentielle partielle du second ordre

$$a^2\frac{d^2V}{dx^2}+b^2\frac{d^2V}{dy^2}+c^2\frac{d^2V}{dz^2}=\frac{\Gamma D}{q}\frac{dV}{dt}.$$

On aura de même dans le second phénomène

$$a^2\frac{d^2V'}{dx'^2}+b^2\frac{d^2V'}{dy'^2}+c^2\frac{d^2V'}{dz'^2}=\frac{\Gamma' D'}{q'}\frac{dV'}{dt'},$$

avec les relations

$$V'=\tau V;\qquad dx'=\lambda\,dx,\qquad dy'=\lambda\,dy,\qquad dz'=\lambda\,dz;$$

$$\Gamma'=\gamma\Gamma;\qquad D'=\frac{\mu}{\lambda^3}D;\qquad q'=\chi q;\qquad dt'=\theta\,dt.$$

En substituant ces valeurs, et tenant compte de la première équation, il reste

$$\frac{\tau}{\lambda^2}=\frac{\gamma\mu\tau}{\lambda^3\chi\theta},$$

ou en simplifiant

$$(1)\qquad \lambda\chi\theta=\gamma\mu.$$

Quant à l'équation à la surface, on peut l'écrire de la manière suivante

$$ma^2\frac{dV}{dx}+nb^2\frac{dV}{dy}+pc^2\frac{dV}{dz}+\frac{e}{q}V=0.$$

On aura de même pour le second problème

$$ma^2\frac{dV'}{dx'}+nb^2\frac{dV'}{dy'}+pc^2\frac{dV'}{dz'}+\frac{e'}{q'}V'=0;$$

avec les relations

$$dx'=\lambda\,dx,\qquad dy'=\lambda\,dy,\qquad dz'=\lambda\,dz;$$

$$V'=\tau V;\qquad e'=\varepsilon e;\qquad q'=\chi q.$$

Il en résulte

$$\frac{\tau}{\lambda}=\frac{\varepsilon\tau}{\chi},$$

et en réduisant

$$(2)\qquad \chi=\varepsilon\lambda.$$

Les sept rapports de similitude des phénomènes thermiques λ, θ, μ, τ, γ, χ, ε sont donc nécessairement liés les uns aux autres par les

deux conditions (1) et (2). Il ne restera par suite à choisir arbitrairement que cinq seulement de ces rapports, à savoir celui τ des températures qui ne figure pas dans ces relations, et quatre autres à volonté.

4. Supposons, par exemple, deux corps semblables formés d'une substance identique, mais enduits différemment à la surface. La matière étant la même, on ne change rien à la chaleur spécifique Γ, à la conductibilité q, à la densité D

$$\gamma = 1, \qquad \chi = 1, \qquad \frac{\lambda^3}{\mu} = 1.$$

Dès lors les équations (1) et (2) deviennent

$$\theta = \lambda^2, \qquad \varepsilon = \frac{1}{\lambda}.$$

Ainsi donc pour assurer dans ce cas la similitude, il faut que le nouvel enduit soit tel que les pouvoirs émissifs varient en raison inverse des dimensions; et l'on devra, en outre, comparer les états séparés par des intervalles de temps qui soient entre eux comme le carré des dimensions. Pour un corps deux fois plus gros en diamètre par exemple, il faudra un pouvoir émissif moitié moindre, et le refroidissement marchera quatre fois plus lentement.

Comme second exemple, supposons deux corps de forme identique, enduits de la même manière et dont on veut que les états homologues se développent simultanément. Nous ferons d'après cela

$$\lambda = 1, \qquad \varepsilon = 1, \qquad \theta = 1.$$

L'équation (2) donne alors

$$\chi = 1.$$

et par suite la formule (1)

$$\gamma = \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda^3}{\mu}.$$

Il faudra donc employer des substances ayant la même conductibilité, avec des chaleurs spécifiques en raison inverse de leurs densités.

On pourra ainsi varier les éléments de la question d'un très grand nombre de manières, et soumettre les plus simples au contrôle de l'expérience.

5. On traite à part en thermologie une question importante appelée *problème de la barre*. Sa solution diffère du mode général en ce qu'une des dimensions devenant tout à fait prépondérante à l'égard des deux autres, on peut éviter l'emploi des différentielles partielles relatives aux trois coordonnées, et déterminer la température par l'équation spéciale

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{CD}{q}\frac{dV}{dt} + \frac{Pe}{Sq}V,$$

en appelant P le périmètre et S l'aire de la section de la barre. Malgré la forme différente de cette analyse, on peut considérer comme à peu près évident que, la nature du phénomène n'ayant pas changé, il doit encore être soumis aux relations (1) et (2). Cependant il ne sera pas inutile de s'en assurer avec rigueur.

On aura pour cela dans le phénomène semblable

$$\frac{d^2V'}{dx'^2} = \frac{C'D'}{q'}\frac{dV'}{dt'} + \frac{P'e}{S'q'}V',$$

avec les relations

$$V' = \varepsilon V, \qquad dx' = \lambda\, dx, \qquad C' = \gamma C, \qquad D' = \frac{k\theta}{\gamma}D,$$

$$q' = kq, \qquad dt' = \theta\, dt, \qquad P' = \lambda P, \qquad S' = \lambda^2 S,$$

ce qui donnera

$$\frac{\varepsilon}{\lambda^2}\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\gamma k\theta\varepsilon}{\lambda^2 k\theta}\frac{CD}{q}\frac{dV}{dt} + \frac{\lambda\varepsilon}{\lambda^2 k}\frac{Pe}{Sq}V.$$

En supprimant le facteur $\frac{\varepsilon}{\lambda^2}$, et retranchant de la première équation,

il reste

$$\left(1-\frac{\gamma\alpha}{\lambda\varphi^2}\right)\frac{\Gamma D}{q}\frac{dV}{dt}-\left(1-\frac{\lambda\varepsilon}{\varphi}\right)\frac{Pe}{Sq}V=0.$$

Mais comme V et $\frac{dV}{dt}$ doivent rester arbitraires, et qu'aucun des deux facteurs $\frac{\Gamma D}{q}$ et $\frac{Pe}{Sq}$ ne saurait être annulé, il nous faut égaler à zéro chacune des deux parenthèses, ce qui reproduit les conditions (1) et (2).

6. Il existe, au contraire, toute une classe de phénomènes pour lesquels les conclusions seront modifiées. Ce sont ceux que l'on désigne sous le nom d'*états d'équilibre mobile de température*. Dans ce cas, V ne dépend plus du temps, $\frac{dV}{dt}$ s'annule, et l'équation du second ordre se réduisant à la forme

$$a^2\frac{d^2V}{dx^2}+b^2\frac{d^2V}{dy^2}+c^2\frac{d^2V}{dz^2}=0,$$

devient homogène et n'impose plus aux rapports de similitude la restriction (1). Quant à l'équation à la surface, elle subsiste, avec la condition (2) qui en est la conséquence.

(*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1879.)

THÉORÈMES

RELATIFS

A L'ACTINOMÉTRIE DES PLAQUES MOBILES.

---

1. L'idée de cette étude m'a été suggérée par la circonstance suivante. En voyant un jour osciller comme un pendule un vase suspendu par son anse, et recevant la pluie, j'eus la curiosité de chercher par le calcul comment le mouvement influençait la quantité d'eau recueillie par cette sorte d'udomètre. En élargissant ensuite progressivement la question, j'ai rencontré quelques propriétés générales dont la simplicité m'a paru mériter d'être signalée dans cette courte Note.

Tout d'abord, pour écarter la considération de la vitesse relative, je supposerai la vitesse de chute très considérable, en envisageant de la lumière ou de la chaleur rayonnante qui tombe verticalement sur une plaque mobile. Quant au mouvement de cette dernière, nous le définirons en supposant qu'elle soit assujettie par ses liaisons à rester normale à une courbe quelconque que décrit, sous l'influence de la pesanteur, son centre de gravité. A la vérité, le mouvement effectif ne se trouve pas par là complètement déterminé, car la plaque peut encore tournoyer arbitrairement sur son centre dans son propre plan. Mais il est clair que cette dernière circonstance n'intéresse en rien la mesure actinométrique demandée. La forme même du contour reste également indifférente; il suffit qu'on en connaisse la superficie, à laquelle la

quantité reçue restera naturellement proportionnelle. Nous pouvons donc nous borner à effectuer cette détermination pour l'unité de surface.

2. Si Q désigne la quantité que recevrait dans l'unité de temps l'unité de surface supposée immobile et horizontale, le résultat deviendra $Q \sin\alpha$ lorsqu'elle fait un angle α avec la verticale, et $Q\,dt \sin\alpha$ pendant une durée dt. La valeur cherchée q sera donc

$$(1) \qquad q = Q \int dt \sin\alpha.$$

Mais on a d'ailleurs, en appelant s l'arc de courbe, h sa projection verticale et v la vitesse du centre de gravité

$$\sin\alpha = \frac{dh}{ds}, \qquad dt = \frac{ds}{v},$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(h - h_0)}.$$

Il vient, d'après cela

$$q = Q \int_{h_0}^{h_1} \frac{dh}{\sqrt{v_0^2 + 2g(h - h_0)}} = \frac{Q}{g}\left[\sqrt{v_0^2 + 2g(h_1 - h_0)} - v_0\right],$$

d'où le théorème suivant : *La quantité reçue par la plaque dans le mouvement qui lui est imprimé par la pesanteur est absolument indépendante de la nature de la trajectoire à laquelle elle est assujettie à rester normale. Elle ne dépend que de la hauteur parcourue par son centre de gravité le long de cette courbe. Si l'on rapporte la hauteur au niveau qui correspond à une vitesse nulle, la quantité reçue sera proportionnelle à la racine carrée de cette hauteur.*

3. Imaginons, par exemple, une oscillation cycloïdale complète. En désignant par l la longueur du fil de ce pendule cycloïdal, on fera, pour obtenir dans une demi-oscillation la moitié $\frac{q}{2}$ du résultat

demandé

$$v_0 = 0, \qquad h_0 = 0, \qquad h_1 = \frac{l}{2},$$

$$\frac{q}{2} = Q\sqrt{\frac{l}{g}},$$

ou, d'après la valeur de la durée T de l'oscillation complète

$$(2) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad q = \frac{2}{\pi}QT.$$

On voit par là que *l'influence de l'oscillation cycloïdale sur la quantité reçue est la même que si la plaque restait constamment immobile sous l'inclinaison qui a comme sinus $\frac{2}{\pi}$, et pour valeur* 30°24′47″.

4. Pour un pendule circulaire et une très petite amplitude θ, on aura

$$h_1 - h_0 = l - l\cos\theta = 2l\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad \frac{q}{2} = 2Q\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Comme la formule (2) s'applique encore approximativement à de très faibles oscillations, il vient

$$q = \frac{4}{\pi}QT\sin\frac{\theta}{2}.$$

L'inclinaison permanente qui serait équivalente à cet état d'oscillation a donc pour valeur

$$\sin\alpha = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\theta}{2},$$

$$\alpha = \frac{2}{\pi}\theta = 0,63661\ldots\theta,$$

en confondant l'arc avec son sinus.

5. Substituons maintenant à la considération de la pesanteur celle d'un centre d'action. Désignons par $f(r)$ l'attraction qu'il exerce à la distance r, et par $Q = \varphi(r)$ la loi de l'intensité du fluide qu'il émet,

et qui se dissémine d'après la distance. Nous concevons d'ailleurs ces fonctions d'une manière abstraite et générale, indépendante des lois expérimentales de la gravitation et de la chaleur rayonnante.

L'équation des forces vives donne alors

$$\tfrac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = -\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr,$$

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v_0^2 - \frac{2}{m}\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr,$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - \dfrac{2}{m}\displaystyle\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr}},$$

$$\sin\alpha = \frac{dr}{ds}.$$

L'équation (1) entraînera donc

$$dq = Q\,dt\sin\alpha = \varphi(r)\frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - \dfrac{2}{m}\displaystyle\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr}}\,\frac{dr}{ds},$$

$$q = \int_{r_0}^{r} \frac{\varphi(r)\,dr}{\sqrt{v_0^2 - \dfrac{2}{m}\displaystyle\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr}}.$$

On voit dès lors que *la quantité reçue par la plaque est indépendante de la courbe à laquelle elle doit rester normale, et ne dépend que des distances du centre d'action aux extrémités de l'arc parcouru sur cette courbe par le centre de gravité.*

6. Considérons, par exemple, la loi de la raison inverse du carré de la distance, qui régit à la fois l'intensité de la chaleur et celle de la gravitation. Nous poserons à cet égard

$$\varphi(r) = \frac{\Phi}{r^2}, \qquad \text{et} \qquad f(r) = \frac{F}{r^2},$$

en désignant par Φ et F les intensités respectives à l'unité de distance.

Si l'on supprime la vitesse initiale (ce qui ne restreint pas la généralité des résultats, puisqu'il suffit pour cela de faire un choix convenable de la sphère de rayon r_0), il viendra

$$q = \Phi\sqrt{\frac{m}{2\mathrm{F}}}\int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}}} = \Phi\sqrt{\frac{2m}{\mathrm{F}}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right)} = \frac{\Phi\sqrt{\frac{2m}{\mathrm{F}}}}{\sqrt{\frac{r_0 r_1}{r_0 - r_1}}}.$$

La quantité reçue varie donc en raison inverse de la racine carrée de la quatrième proportionnelle aux distances initiale et finale du centre de gravité au centre d'action et à leur rapprochement mutuel.

7. Supposons actuellement un nombre quelconque de centres, attirant chacun suivant une loi quelconque $f_k(r_k)$, mais avec cette hypothèse que leurs intensités émissives $\varphi_k(r_k)$ seront, pour chacun d'eux, proportionnelles à leurs énergies dynamiques, et égales à $nf_k(r_k)$. On aura ainsi (1)

$$(3)\qquad \begin{cases} dq = \sum(q_k\,dt\sin\alpha_k) = dt\sum\left[\varphi_k(r_k)\dfrac{dr_k}{dt}\right] \\ \quad = \dfrac{1}{v}\sum[\varphi_k(r_k)\,dr_k] = \dfrac{n}{v}\sum[f_k(r_k)\,dr_k]. \end{cases}$$

Or une telle somme forme toujours une expression intégrable en x, y, z. Si donc on désigne par U cette *fonction des forces*, il vient simplement

$$dq = n\frac{d\mathrm{U}}{v}.$$

D'ailleurs, le principe de la conservation des forces vives donne alors

$$(4)\qquad \tfrac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \mathrm{U} - \mathrm{U}_0,$$

$$dq = n\frac{d\mathrm{U}}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}(\mathrm{U} - \mathrm{U}_0)}},$$

$$(5)\qquad q = mn\left[\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}(\mathrm{U} - \mathrm{U}_0)} - v_0\right].$$

On reconnaît d'après cela que *la quantité reçue par la plaque est indépendante de la nature de la courbe à laquelle elle est assujettie à rester normale, et qu'elle ne dépend que des surfaces de niveau passant aux extrémités de l'arc parcouru par son centre de gravité.*

8. *Si, en particulier, la plaque se meut de manière que son centre reste sur une surface de niveau, en y décrivant d'ailleurs une ligne quelconque, cette quantité sera nulle.*

Cette propriété se vérifie immédiatement pour le cas de la pesanteur ou d'un centre d'action; car la plaque, restant normale à une ligne tracée dans le plan horizontal ou sur la sphère, ne présente alors que sa tranche au flux lumineux et, par suite, ne reçoit rien.

Dans le cas général, la nullité du résultat ne tient plus à la même cause. Elle n'est alors qu'algébrique, et doit s'entendre en ce sens que *la plaque reçoit des quantités égales sur ses deux faces pendant son mouvement, quelle que soit la ligne que parcourt sur la surface de niveau son centre de gravité.*

9. On peut enfin apporter à ces énoncés une dernière généralisation. Remarquons, à cet effet, qu'il existe également un système de surfaces de niveau pour les intensités $\varphi_k(r_k)$, si on les traite comme des forces émanées de leurs différents centres. Supposons uniquement que *ces surfaces soient les mêmes que celles des actions dynamiques, soit que celles-ci émanent des mêmes centres ou de centres différents, ou qu'elles soient de toute autre nature, admettant seulement une fonction des forces. Les propriétés des paragraphes* 7 *et* 8 *subsisteront encore sans modification.*

En effet, le paramètre des surfaces de niveau des forces φ ne pourra être, dans cette hypothèse, qu'une fonction $\psi(U)$ de celui U des forces f.

La formule (3) deviendra donc, d'après l'équation (4),

$$dq = \frac{1}{v}\psi(U)\,dU;$$

c'est-à-dire

$$dq = \frac{\psi(U)\,dU}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}(U - U_0)}}.$$

Comme elle ne renferme que la variable U, elle donnera encore lieu aux mêmes énoncés.

(*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. C, séance du 13 avril 1885.)

DES

CENTRES DE COURBURE SUCCESSIFS.

1. De même que l'on déduit d'une courbe proposée une autre ligne qu'on appelle sa *développée,* de même on peut former la développée de la développée, et ainsi de suite indéfiniment. On obtient de cette manière pour un point donné, un premier, un second, un troisième... centres de courbure. De là deux questions distinctes : ou bien chercher pour tous les points de la courbe le lieu des centres de courbure d'un ordre déterminé quelconque k, c'est-à-dire sa $k^{\text{ième}}$ développée ; ou bien, pour un point assigné arbitrairement sur cette ligne, envisager toute la série de ses centres de courbure des divers ordres. Cette dernière question est celle que nous nous proposerons ici. La première a été résolue depuis longtemps par une méthode très simple que je dois rappeler brièvement, afin de bien fixer l'interprétation des signes.

2. Nous supposerons la courbe représentée par son équation *naturelle* entre ses *coordonnées intrinsèques* ρ et ω. Un arc élémentaire de la première développée a pour valeur $d\rho$. D'autre part, l'angle de ses normales extrêmes est le même que celui $d\omega$ de la proposée; car ces droites sont respectivement parallèles aux tangentes de cette dernière. Si donc ρ_1 désigne la longueur de ces normales, on aura l'égalité

$$d\rho = \rho_1 \, d\omega, \qquad \rho_1 = \frac{d\rho}{d\omega},$$

qui donne la valeur du rayon de courbure de la développée, c'est-à-dire l'équation de cette courbe dans le même système de variables.

Pour l'interprétation du signe de cette expression, il suffira au lecteur de tracer deux arcs de courbe. Si l'on suppose d'abord la courbure croissante dans le sens où augmente ω, ρ_1 se trouve porté parallèlement à l'arc élémentaire et dans le sens même de cet arc; mais alors ρ diminue et sa dérivée ρ_1 est négative. Si au contraire la courbure diminue, ρ_1 est dirigé dans le sens opposé à celui de l'arc; mais dans ce cas ρ augmente et sa dérivée ρ_1 est positive. D'où la règle suivante : Le rayon de la développée se porte dans le sens de l'arc ou en sens contraire suivant qu'il est négatif ou positif.

3. De l'équation précédente on conclut immédiatement celle d'une développée d'ordre quelconque

$$\rho_k = \frac{d^k \rho}{d\omega^k}.$$

La règle précédente montre que si tous les rayons sont positifs entre ρ et ρ_k, leur série forme un polygone dont tous les angles sont droits, et qui tourne constamment dans le même sens, que je suppose direct pour fixer les idées. Si donc nous laissons le signe de chacune des dérivées implicitement compris dans son expression, nous devons prendre pour le rayon qui joint les centres k et $k+1$, suivant la double parité de k, le sens suivant :

$4i$ parallèle à la normale et de même sens.

$4i+1$ parallèle à la tangente et de sens contraire,

$4i+2$ parallèle à la normale et de sens contraire,

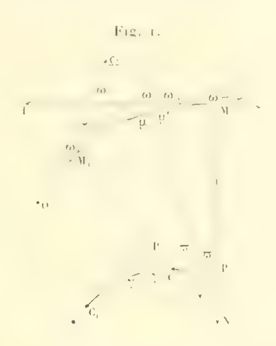
$4i+3$ parallèle à la tangente et de même sens.

4. Actuellement je prends le point quelconque considéré M comme origine, et j'y trace deux axes rectangulaires, l'un MN suivant la normale, l'autre MT en sens contraire de la tangente. Je leur rapporterai le centre C d'ordre quelconque k par deux coordonnées T et N. Enfin je forme la figure correspondante $M_0P_0C_0$ pour un point fixe quel-

conque M_0, et j'imagine l'arc CC_0 de la $k^{\text{ième}}$ développée qui relie les deux centres.

Nous obtenons par là un hexagone mixtiligne $PMM_0P_0C_0C$ dont la résultante $T = PC$ sera la somme des projections sur la tangente des

Fig. 1.



quatre derniers côtés, car le premier lui est perpendiculaire. Si donc on désigne par de petites lettres les projections des grandes lettres de la figure, on aura, en mettant les signes en évidence

$$T = mm_0 - m_0p_0 + p_0c_0 - cc_0.$$

Il reste à calculer les valeurs absolues de ces projections.

Nous avons d'abord

$$p_0c_0 = T_0\cos(\omega - \omega_0), \qquad m_0p_0 = N_0\sin(\omega - \omega_0).$$

Pour évaluer mm_0, envisageons l'élément $\mu\mu'$ qui correspond à l'angle φ variable de ω_0 à ω. Il a pour longueur $\rho\,d\varphi$, en substituant φ à ω dans l'expression générale de ρ tirée de l'équation de la courbe. Sa projection sera donc $\rho\,d\varphi\cos(\omega - \varphi)$, ou $\rho\,d\varphi\cos(\varphi - \omega)$. On a par suite

$$mm_0 = \int_{\omega_0}^{\omega} \rho\cos(\varphi - \omega)\,d\varphi.$$

L'arc CC_0 est composé d'éléments $\gamma\gamma'$ qui correspondent à $\mu\mu'$ et ont pour valeur $\rho_k\,d\varphi$. Comme ils leur sont respectivement parallèles, on

aura pour la projection cc_0 l'expression semblable à la précédente

$$cc_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho \cos(\varphi - \omega)\, d\varphi.$$

Mais il faut placer ici une remarque essentielle.

5. La figure a été tracée pour l'hypothèse $k = 4i$. Si k restant pair est de la forme $4i+2$, l'arc $\gamma\gamma'$ est encore parallèle à $\mu\mu'$; mais CC_0 se trouve pour le point C_0 en prolongement de P_0C_0 au lieu d'être en rebroussement; cc_0 doit donc être changé de signe. Si k devient impair, $\gamma\gamma'$ est perpendiculaire à $\mu\mu'$, et le cosinus doit être remplacé par un sinus. Pour $4i+1$, C_0C se trouve entre la courbe et PC, et il faut prendre le sinus négativement; pour $4i+3$, il passe de l'autre côté de PC, et le sinus est positif.

En résumé, le cosinus de l'expression de cc_0 doit être remplacé par les valeurs

$$\cos(\varphi - \omega), \quad -\sin(\varphi - \omega), \quad -\cos(\varphi - \omega), \quad \sin(\varphi - \omega),$$

suivant que k est de la forme

$$4i, \quad 4i+1, \quad 4i+2, \quad 4i+3.$$

Or, ces quatre changements peuvent être compris dans la formule unique

$$\cos\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right),$$

de telle sorte que l'expression générale de cc_0 sera

$$cc_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d^k\rho}{d\varphi^k} \cos\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) d\varphi.$$

Il vient ainsi en définitive comme expression de T

$$(1) \qquad \begin{aligned} T = {} & T_0 \cos(\omega - \omega_0) + N_0 \sin(\omega - \omega_0) \\ & + \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \left\{ \frac{d^k\rho}{d\varphi^k} \cos\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) - \rho \cos(\varphi - \omega) \right\}. \end{aligned}$$

6. Pour obtenir en second lieu la valeur de N, il suffira de projeter l'hexagone mixtiligne sur la normale. En conservant les mêmes minuscules pour désigner les nouvelles projections et mettant les signes en évidence, nous aurons cette fois-ci

$$N_0 = mm_0 + m_0 p_0 + p_0 c_0 - cc_0.$$

Les valeurs absolues de ces projections sont maintenant

$$p_0 c_0 = T_0 \sin(\omega - \omega_0), \qquad m_0 p_0 = N_0 \cos(\omega - \omega_0).$$

En ce qui concerne mm_0 il faut remplacer $\cos(\omega - \varphi)$ par $\sin(\omega - \varphi)$, ou $-\sin(\varphi - \omega)$, ce qui donne

$$mm_0 = -\int_{\omega_0}^{\omega} \rho \sin(\varphi - \omega)\, d\varphi,$$

et de même

$$cc_0 = -\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d^k \rho}{d\varphi^k} \sin\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) d\varphi.$$

On aura par suite, pour la seconde coordonnée N

$$(2) \qquad \begin{aligned} N = {} & T_0 \sin(\omega - \omega_0) + N_0 \cos(\omega - \omega_0) \\ & + \int_{\omega_0}^{\omega} d\varphi \left\{ \frac{d^k \rho}{d\varphi^k} \sin\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) - \rho \sin(\varphi - \omega) \right\}. \end{aligned}$$

7. Ces formules générales déterminent la position d'un centre quelconque, d'après la valeur de k qui s'y trouve en évidence ([1]). Si l'on veut se représenter d'une manière simple la disposition d'ensemble de leur série tout entière, le plus commode sera d'y faire passer une courbe. Il sera facile d'y retrouver après coup la position des divers centres, car il suffira pour cela d'inscrire un polygone dont tous les angles soient droits. La question est bien entendu indéterminée, puisque par cette série discontinue de points on peut mener une infinité de

---

([1]) Pour qu'on ne rencontre pas de difficultés dans leur application, il faut que la différentielle ne devienne pas infinie dans les limites de l'intégrale, ou que la courbe et sa $k^{\text{ième}}$ développée ne présentent pas de rebroussements entre M et M_0; condition facile à remplir, puisque M_0 est un point choisi arbitrairement.

tracés : mais on trouvera très simplement une solution en éliminant k entre les relations (1) et (2).

L'équation résultante renfermera alors T et N à titre de coordonnées courantes, et ω comme un paramètre caractérisant le point de la courbe qui a été considéré, et fournissant par sa variation toute une famille de lieux de centres ; ω_0, N_0, T_0 sont des constantes absolues, qui se rapporteront en général à un point singulier où l'évaluation de N_0 et T_0 soit facile. Quant à k et φ, ils n'entrent plus, car k a été éliminé, et φ est un symbole d'intégration qui disparaît lorsque l'on prend l'intégrale entre ses limites.

8. *Application.* — Pour montrer une application de cette méthode, je considérerai la spirale logarithmique. Il est facile d'abord d'en former l'équation. Lorsque l'azimut s'accroît en progression arithmétique, le rayon vecteur croît en progression géométrique. Mais l'angle μ de la normale et du rayon vecteur étant constant, l'azimut et l'angle de contingence varient ensemble des mêmes quantités. On sait, de plus, que le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur ; on a, d'après cela

$$\rho = e^{m\omega}, \qquad \rho_k = \frac{d^k\rho}{d\omega^k} = m^k e^{m\omega},$$

m désignant la tangente de l'angle μ, et l'origine étant placée au point où le rayon de courbure est l'unité.

Quant au point arbitraire M_0, nous le prendrons au pôle en faisant $\omega_0 = -\infty$. On y a dès lors, quel que soit k : $\rho_k = 0$, et par suite, $N_0 = 0$, $T_0 = 0$. Les formules générales se réduisent par là au terme qui contient l'intégrale définie

$$T = \int_{-\infty}^{\omega} e^{m\varphi} \left\{ m^k \cos\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) - \cos(\varphi - \omega) \right\} d\varphi,$$

$$N = \int_{-\infty}^{\omega} e^{m\varphi} \left\{ m^k \sin\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) - \sin(\varphi - \omega) \right\} d\varphi.$$

9. Ces intégrales sont dans tous les Traités, et je les prends de suite entre leurs limites. On voit que pour la limite inférieure elles s'évanouissent, comme contenant en facteur $e^{-\infty}$ avec des coefficients trigonométriques, à la vérité indéterminés, mais nécessairement inférieurs à l'unité. Pour la limite supérieure $\varphi = \omega$, ω disparaît en même temps que φ des lignes trigonométriques, et ne subsiste plus que dans l'exponentielle. Il reste seulement $\frac{k\pi}{2}$ pour le premier arc et zéro pour le second. Il vient ainsi

$$\mathrm{T} = -\frac{e^{m\omega}}{m^2+1}\left\{m^k\left(m\cos\frac{k\pi}{2} + \sin\frac{k\pi}{2}\right) - m\right\},$$

$$\mathrm{N} = +\frac{e^{m\omega}}{m^2+1}\left\{m^k\left(m\sin\frac{k\pi}{2} - \cos\frac{k\pi}{2}\right) + 1\right\};$$

ce que j'écris de la manière suivante

$$\frac{m}{m^2+1}e^{m\omega} - \mathrm{T} = \frac{e^{m\omega}}{m^2+1}m^k\left(m\cos\frac{k\pi}{2} + \sin\frac{k\pi}{2}\right),$$

$$\mathrm{N} - \frac{1}{m^2+1}e^{m\omega} = \frac{e^{m\omega}}{m^2+1}m^k\left(m\sin\frac{k\pi}{2} - \cos\frac{k\pi}{2}\right).$$

Interprétons géométriquement ces résultats : soit M_k le centre quel-

Fig. 2.

conque rapporté au point M par ses coordonnées

$$\mathrm{T} = \overline{\mathrm{PM}_k}, \qquad \mathrm{N} = \overline{\mathrm{MP}}.$$

Le premier centre de courbure M_1 s'obtient en élevant OM_1 perpendi-

culaire sur MO, et l'on a

$$\overline{MM}_1 = \rho = e^{m\omega},$$

d'où

$$\frac{e^{m\omega}}{\sqrt{m^2+1}} = \overline{MM}_1 \cos\varphi = \overline{MO},$$

et, par suite, d'une part

$$\frac{1}{m^2+1}\, e^{m\omega} = \overline{MO}\cos\varphi = \overline{MQ},$$

$$N = \frac{1}{m^2+1}\, e^{m\omega} = \overline{MP} - \overline{MQ} = \overline{PQ} = \overline{OR};$$

et, de l'autre

$$\frac{m}{m^2+1}\, e^{m\omega} = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\, \frac{e^{m\omega}}{\sqrt{m^2+1}} = \overline{MO}\sin\varphi = \overline{OQ} = \overline{PR},$$

$$\frac{m}{m^2+1}\, e^{m\omega} - T = \overline{PR} - \overline{PM}_k = \overline{RM}_k.$$

Nos formules deviennent ainsi

$$\overline{RM}_k = \frac{\overline{MO}}{\sqrt{m^2+1}}\, m^k \left(m\cos\frac{k\pi}{2} - \sin\frac{k\pi}{2}\right),$$

$$\overline{OR} = \frac{\overline{MO}}{\sqrt{m^2+1}}\, m^k \left(m\sin\frac{k\pi}{2} + \cos\frac{k\pi}{2}\right),$$

et l'élimination de k va s'effectuer facilement.

10. On tire d'abord de là, en divisant membre à membre

$$\frac{\overline{RM}_k}{\overline{OR}} = \frac{m\cos\frac{k\pi}{2} - \sin\frac{k\pi}{2}}{\cos\frac{k\pi}{2} + m\sin\frac{k\pi}{2}} = \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\frac{k\pi}{2}}{1 + \operatorname{tang}\varphi\,\operatorname{tang}\frac{k\pi}{2}} = \operatorname{tang}\left(\varphi - \frac{k\pi}{2}\right),$$

et, par suite

$$k = -\frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{\overline{RM}_k}{\overline{OR}} - \varphi\right) = \frac{2}{\pi}(\mathrm{ROA} - \mathrm{ROB}) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{MOM}_k.$$

ou en représentant par θ l'azimut $\widehat{\mathrm{MOM}_k}$

$$k = \frac{2}{\pi}\theta.$$

Il vient d'autre part, en ajoutant les carrés

$$\overline{\mathrm{RM}}_k^2 + \overline{\mathrm{OR}}^2 = \overline{\mathrm{MO}}^2 \cdot m^{2k}.$$

Mais on a aussi

$$\overline{\mathrm{RM}}_k^2 + \overline{\mathrm{OR}}^2 = \overline{\mathrm{OM}}_k^2;$$

si donc nous appellons r le rayon vecteur $\overline{\mathrm{OM}_k}$ et R la constante $\overline{\mathrm{MO}}$, l'on aura

$$r^2 = \mathrm{R}^2 m^{2k};$$

d'où en extrayant la racine et substituant à k la valeur précédente

$$r = \mathrm{R} m^{\frac{2}{\pi}\theta}.$$

Nous voyons par là que toute la série des centres de courbure du point M est distribuée le long d'une autre spirale logarithmique, que j'appellerai la *spirale-lieu* pour la distinguer de la proposée.

Fig. 5.

11. La simplicité de ce résultat mérite qu'on l'établisse directement en se fondant sur les propriétés de la spirale. Le centre de courbure M_1 du point quelconque M s'obtient en élevant sur le rayon vecteur OM la perpendiculaire OM_1 jusqu'à la normale MM_1. Comme du reste

la développée est encore une spirale, son centre M_2 s'obtiendra de même en élevant sur son rayon vecteur OM_1 la perpendiculaire OM_2 jusqu'à sa normale M_1M_2. Mais OM_2 se trouve dans la direction de OM. De même OM_3 prolongera OM_1, et ainsi de suite.

De là ce premier résultat, encore plus simple que le précédent : tous les centres de courbure d'un point d'une spirale logarithmique sont disposés sur les deux branches d'une croix rectangulaire, qui a son centre au pôle et l'une de ses droites suivant le rayon vecteur. On obtiendra donc, de la manière la plus claire, tous les centres par l'intersection de cette croix et de la spirale-lieu, qu'il nous faut encore retrouver par cette voie.

12. Rapportons à cet effet le lieu à des coordonnées polaires (r, θ) dont O soit le pôle et OM l'axe polaire. On aura, d'une part

$$\theta = \frac{k\pi}{2},$$

et, de l'autre, dans un triangle rectangle quelconque OM_kM_{k-1} formé par un rayon de courbure et les deux branches de la croix rectangulaire

$$r_k = r_{k-1} \operatorname{tang} \mu = m r_{k-1}.$$

On tire de là, de proche en proche

$$r_k = m^k R,$$

car r_0 n'est autre que R. Si maintenant on élimine k entre ces deux relations, on retrouve l'équation précédente

$$r = R m^{\frac{2\theta}{\pi}}.$$

13. D'après la forme de cette relation, nous voyons que la spirale proposée et la spirale-lieu ont même pôle, et qu'elles auront ou non même sens, suivant que μ sera supérieur ou inférieur à 45°, ou que la proposée s'ouvre rapidement ou lentement. Pour la spirale de 45°, le

lieu se réduit à un cercle, et les centres sont seulement au nombre de quatre disposés en carré et se reproduisant périodiquement.

L'angle μ' de la spirale-lieu sera donné par sa tangente trigonométrique

$$m' = \frac{\pi}{2 \log m};$$

Cette valeur est indépendante de ω; ce qui établit ce résultat remarquable, que toutes les spirales-lieu sont identiques pour les divers points d'une spirale proposée. On les obtiendra donc successivement par la rotation de l'une d'entre elles autour du pôle. Nous voyons même que, dans une quelconque de ses positions, la spirale mobile forme la spirale-lieu de la proposée pour tous les points où elle la rencontre; de telle sorte qu'il suffit d'opérer un seul tour pour avoir égard à toutes les spires de cette dernière.

14. Si l'on veut connaître la spirale logarithmique qui sera identique à sa spirale-lieu, il suffit de faire dans la dernière relation $m' = m$; elle donne alors

$$m \log m = \frac{\pi}{2}.$$

Cette équation a été déjà étudiée, comme conduisant à trouver une spirale qui soit sa propre développée. Il est naturel, d'après cela, qu'elle fournisse la solution que nous cherchions. Comme le sens des deux spirales est le même, puisqu'elles coïncident, on prévoit que l'angle μ doit se trouver dans la seconde moitié du quadrant; il est, en effet, d'environ 75° [1].

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. IV, 1859, p. 183.

CENTRE DES MOYENNES DISTANCES

DES

CENTRES DE COURBURE SUCCESSIFS.

---

1. Nous venons d'obtenir des formules pour la détermination directe du centre de courbure de rang quelconque, sans passer par les développées d'ordre intermédiaire. J'ai représenté, à cet effet, la ligne proposée par son équation *naturelle* entre le rayon de courbure ρ et l'angle de contingence ω. Pour un point quelconque M, j'appelle C_i le centre de courbure de la développée d'ordre i (¹). Je détermine ce point au moyen de deux coordonnées T_i, N_i, respectivement parallèles à la tangente et à la normale en M. Si, d'autre part, nous choisissons arbitrairement sur la courbe un point fixe M′, d'azimut ω', en rapportant à l'aide de T'_i, N'_i ses divers centres de courbure C'_i à la tangente et à la normale de M′, j'ai montré que les coordonnées courantes T_i, N_i ont pour expressions générales

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} T_i = {} & T'_i \cos(\omega - \omega') - N'_i \sin(\omega - \omega') + \int_{\omega'}^{\omega} \rho \cos(\varphi - \omega)\, d\varphi \\ & + \int_{\omega'}^{\omega} \frac{d^{i+1}\rho}{d\varphi^{i+1}} \sin\left(\varphi - \omega + i\frac{\pi}{2}\right) d\varphi, \end{aligned} \right.$$

(¹) Lequel est le $(i+1)^{\text{ième}}$ centre de courbure de la proposée, et se trouve sur la développée d'ordre $i+1$.

et

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} N &= T\sin(\omega-\omega') + N'\cos(\omega-\omega') + \int_{\omega'}^{\omega} \rho\sin(\varphi-\omega)\,d\varphi \\ &+ \int_{\omega'}^{\omega} \frac{d^{i+1}\rho}{d\varphi^{i+1}}\cos\left(\varphi-\omega+i\frac{\pi}{2}\right)d\varphi, \end{aligned} \right.$$

φ désignant un symbole d'intégration qui varie de ω' à ω.

2. Représentons maintenant par t_k, n_k les coordonnées qui déterminent le centre G_k des moyennes distances des k centres de courbure $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_k$ [1].

Nous aurons, à cet égard

$$k t_k = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_k.$$

Si nous effectuons cette somme à l'aide de l'équation (1), la première des deux intégrales qu'elle renferme se reproduira k fois. Les divers termes en $\cos(\omega-\omega')$ et $\sin(\omega-\omega')$ se grouperont entre eux, et je représenterai provisoirement l'ensemble de cette partie par $kA\sin\omega + kB\cos\omega$. Enfin la somme des intégrales que fournit le quatrième terme pourra être remplacée par l'intégrale de la somme

$$(3)\qquad x = \sum_{1}\left[\frac{d^{i+1}\rho}{d\varphi^{i+1}}\sin\left(\varphi-\omega+i\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Nous aurons, d'après cela

$$k t_k = kA\sin\omega + kB\cos\omega + k\int_{\omega'}^{\omega}\rho\cos(\varphi-\omega)\,d\varphi + \int_{\omega'}^{\omega} x\,d\varphi,$$

et il ne reste plus qu'à évaluer x.

---

[1] Pour plus de simplicité dans les résultats, je ne comprends pas dans ce système le centre de courbure C de la proposée. Il serait facile au besoin de l'y admettre après coup, puisque nous connaissons ses coordonnées $T = 0$, $N = \rho$. On aurait, à cet effet,

$$(k+1)\theta_k = k t_k, \qquad (k+1)\nu_k = k n_k + \rho.$$

Or cette fonction a pour dérivée

$$\frac{dx}{d\varphi} = \sum_{1}^{k} \left[\frac{d^{i+2}\rho}{d\varphi^{i+2}} \sin\left(\varphi - \omega + i\frac{\pi}{2}\right) + \frac{d^{i+1}\rho}{d\varphi^{i+1}} \cos\left(\varphi - \omega + i\frac{\pi}{2}\right) \right],$$

et cette nouvelle suite admet comme terme général

$$\frac{d^{j+2}\rho}{d\varphi^{j+2}} \left\{ \sin\left(\varphi - \omega + j\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left[\varphi - \omega + (j+1)\frac{\pi}{2}\right] \right\},$$

quantité identiquement nulle. Il ne subsiste donc, de $\frac{dx}{d\varphi}$, que la partie qui provient de ses deux termes extrêmes et ne participe pas au groupement précédent

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{d^{k+2}\rho}{d\varphi^{k+2}} \sin\left(\varphi - \omega + k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{d^{2}\rho}{d\varphi^{2}} \sin(\varphi - \omega).$$

Nous en déduirons

$$(4) \qquad x = \Omega + \int_{\omega''}^{\varphi} d\varphi \left[\frac{d^{k+2}\rho}{d\varphi^{k+2}} \sin\left(\varphi - \omega + k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{d^{2}\rho}{d\varphi^{2}} \sin(\varphi - \omega) \right],$$

en mettant en évidence, d'un côté, une intégrale définie, qui s'annule identiquement pour $\varphi = \omega''$ (azimut d'un nouveau point fixe M″ arbitrairement choisi) et, d'autre part, la valeur correspondante Ω de x, provisoirement inconnue [1].

Il est à remarquer (3) que Ω renferme ω d'une manière linéaire par rapport à $\sin\omega$ et $\cos\omega$. La seconde intégration donnera $\Omega\varphi$, et, par suite, $\Omega(\omega - \omega')$ quand on la prendra entre ses limites. On aura donc, outre des termes en $\sin\omega$ et $\cos\omega$, que nous pouvons fondre par la pensée avec A et B, d'autres termes de la forme $k\mathrm{C}\omega\sin\omega + k\mathrm{D}\omega\cos\omega$.

---

[1] On peut après coup, comme vérification, reconstituer, à l'aide de la formule (4), le développement (3) en employant l'intégration par parties.

Il vient, par conséquent, en définitive

$$(5)\quad \begin{cases} u = A\sin\omega + B\cos\omega + C\omega\sin\omega + D\omega\cos\omega + \displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega}\rho\cos(\varphi-\omega)\,d\varphi \\ \qquad + \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega}d\varphi\int_{\omega_0}^{\varphi}d\varphi\left[\frac{d^{k+2}\rho}{d\varphi^{k+2}}\sin\left(\varphi-\omega-k\frac{\pi}{2}\right)-\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\sin(\varphi-\omega)\right]. \end{cases}$$

On trouve, par une marche toute semblable

$$(6)\quad \begin{cases} v = E\sin\omega - F\cos\omega + G\omega\sin\omega + H\omega\cos\omega - \displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega}\rho\sin(\varphi-\omega)\,d\varphi \\ \qquad - \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega}d\varphi\int_{\omega_0}^{\varphi}d\varphi\left[\frac{d^{k+2}\rho}{d\varphi^{k+2}}\cos\left(\varphi-\omega-k\frac{\pi}{2}\right)-\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\cos(\varphi-\omega)\right]. \end{cases}$$

Les huit constantes se détermineront à l'aide des valeurs spéciales que prennent les coordonnées pour quatre points fixes arbitraires. Il serait facile d'en développer les expressions générales, mais je m'en abstiendrai à cause de leur complication. On aura soin, dans chaque cas, d'adopter autant que possible des points singuliers pour lesquels il soit aisé de déterminer directement les centres de moyennes distances.

3. Envisageons, par exemple, la spirale logarithmique

$$\rho = e^{m\omega}, \qquad \frac{d^i\rho}{d\omega^i} = m^i e^{m\omega}.$$

Plaçons en son pôle le point M_0 (p. 38). Tous les ρ_i s'y annulent pour $\omega = -\infty$; et comme aucun de leurs coefficients, qui sont des sinus ou des cosinus, ne peut devenir infini, l'on voit disparaître de même leurs diverses sommes qui constituent les constantes inconnues. Il reste dès lors simplement

$$u = \int_{-\infty}^{\omega} e^{m\varphi}\cos(\varphi-\omega)\,d\varphi$$
$$\qquad + \frac{m^2}{k}\int_{-\infty}^{\omega}d\varphi\int_{-\infty}^{\varphi}e^{m\varphi}\left[m^k\sin\left(\varphi-\omega-k\frac{\pi}{2}\right)-\sin(\varphi-\omega)\right]d\varphi.$$

et

$$n_k = -\int_{-\infty}^{\omega} e^{m\varphi}\sin(\varphi-\omega)\,d\varphi$$
$$-\frac{m^2}{k}\int_{-\infty}^{\omega} d\varphi\int_{-\infty}^{\varphi} e^{m\varphi}\left[m^k\cos\left(\varphi-\omega-k\frac{\pi}{2}\right)-\cos(\varphi-\omega)\right]d\varphi.$$

Or on peut, en mettant $e^{m\omega}$ en facteur, remplacer sous les signes d'intégration $e^{m\varphi}$ par $e^{m(\varphi-\omega)}$, $d\varphi$ par $d(\varphi-\omega)$, la limite supérieure φ par $\varphi-\omega$, et l'autre limite ω par zéro. On voit dès lors que, sauf le facteur $e^{m\omega}$ ou ρ, les expressions deviennent indépendantes de ω, et ne renferment que la constante m avec l'arbitraire k.

D'après cela, pour une valeur déterminée de ce dernier paramètre, le rapport $\frac{t_k}{n_k}$ reste indépendant de ω. En outre, la quantité $\sqrt{t_k^2+n_k^2}$ est proportionnelle à ρ, et par suite au rayon vecteur émané du pôle de la spirale. Le centre G_k des moyennes distinctes se construira donc en menant, sous un angle constant par rapport à la tangente, une droite proportionnelle au rayon vecteur. Il est aisé d'en déduire que le lieu géométrique de ce point est une spirale égale à la proposée. Ce lieu reste dès lors identique de forme, quel que soit l'ordre k considéré.

Il est d'ailleurs facile d'effectuer les intégrations, et l'on trouve

$$t_k = \frac{m e^{m\omega}}{k(m^2+1)^2}\left\{k(m^2+1)-2m^2-m^{k+1}\left[(m^2-1)\sin k\frac{\pi}{2}-2m\cos k\frac{\pi}{2}\right]\right\},$$
$$n_k = \frac{e^{m\omega}}{k(m^2+1)^2}\left\{k(m^2+1)-m^2(m^2-1)+m^{k+1}\left[(m^2-1)\cos k\frac{\pi}{2}+2m\sin k\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Nous pouvons également rapporter le lieu géométrique du centre G à des coordonnées polaires r, θ, ce qui donne pour son équation

$$\frac{k(m^2+1)}{m^2\sqrt{m^{2k}-2m^k\cos k\frac{\pi}{2}+1}}\,r = e^{m\left(\theta+\operatorname{arc\,tang} m-\operatorname{arc\,tang}\left\{\frac{2m+m^k\left[(m^2-1)\sin k\frac{\pi}{2}-2m\cos k\frac{\pi}{2}\right]}{m^2-1+m^k\left[(m^2-1)\cos k\frac{\pi}{2}+2m\sin k\frac{\pi}{2}\right]}\right\}\right)}.$$

» 4. Envisageons comme second exemple les épicycloïdes exté-

rieures ou intérieures

$$\rho = \sin m\omega, \qquad \frac{d^i\rho}{d\omega^i} = m^i \sin\left(m\omega - i\frac{\pi}{2}\right).$$

Si l'on effectue les intégrations qui figurent dans l'expression de t_k, on voit apparaître, d'une part, divers termes en $\sin\omega$, $\cos\omega$, $\omega\sin\omega$, $\omega\cos\omega$, que l'on peut supprimer en les confondant par la pensée dans ceux qui sont affectés des coefficients provisoires A, B, C, D; et, en second lieu, des multiples de $\cos m\omega$ et $\sin m\omega$. Ce dernier disparaît spontanément, se trouvant multiplié par $\sin k\pi$, et il ne reste que le terme en $\cos m\omega$. Or celui-ci s'annule à tous les sommets de la courbe, que l'on traverse en nombre infini [1] pour les diverses valeurs $\omega = \frac{(2j \pm 1)\pi}{2m}$. En ces points, on doit d'ailleurs avoir identiquement $t_k = 0$, car tous les centres de courbure successifs (et, par suite, aussi leurs centres de moyennes distances) sont alignés le long de la normale. Il est donc nécessaire que les quatre constantes A, B, C, D soient individuellement nulles; et il ne reste plus définitivement, de l'expression générale, que le terme en $\cos m\omega$. On voit, d'après cela, que la coordonnée tangentielle du centre des moyennes distances d'ordre quelconque reste, pour chaque point de la proposée, proportionnelle au rayon de courbure de la première développée. Le coefficient de proportionnalité a la valeur suivante

$$t_k = \frac{m\cos m\omega}{2k(m^2-1)^2}\left\{2k(1-m^2) - 4m^2 + m^{k+1}\left[(m+1)^2 - (m-1)^2\cos k\pi\right]\right\}.$$

En suivant une marche semblable pour n_k, on voit disparaître d'une part $\cos m\omega$, qui est multiplié par $\sin k\pi$, et en outre les constantes E, F, G, H, par la raison que $\sin m\omega$ s'annule à tous les rebroussements, et qu'en même temps tous les centres s'y trouvent alignés le

---

[1] Même dans les épicycloïdes composées d'un nombre limité de branches, que l'on parcourt indéfiniment quand ω varie de $-\infty$ à $+\infty$.

long de la tangente. Il vient ainsi

$$n_k = \frac{\sin m\omega}{2k(m^2-1)^2}\left\{2k(1-m^2)-2m^2(1+m^2)+m^{k+1}\left[(m+1)^2+(m-1)^2\cos k\pi\right]\right\},$$

et l'on reconnaît que la coordonnée normale des centres de moyennes distances d'ordre quelconque reste proportionnelle, pour chaque point, au rayon de courbure de la proposée.

5. La spirale logarithmique et l'épicycloïde sont des cas particuliers de la courbe plus générale

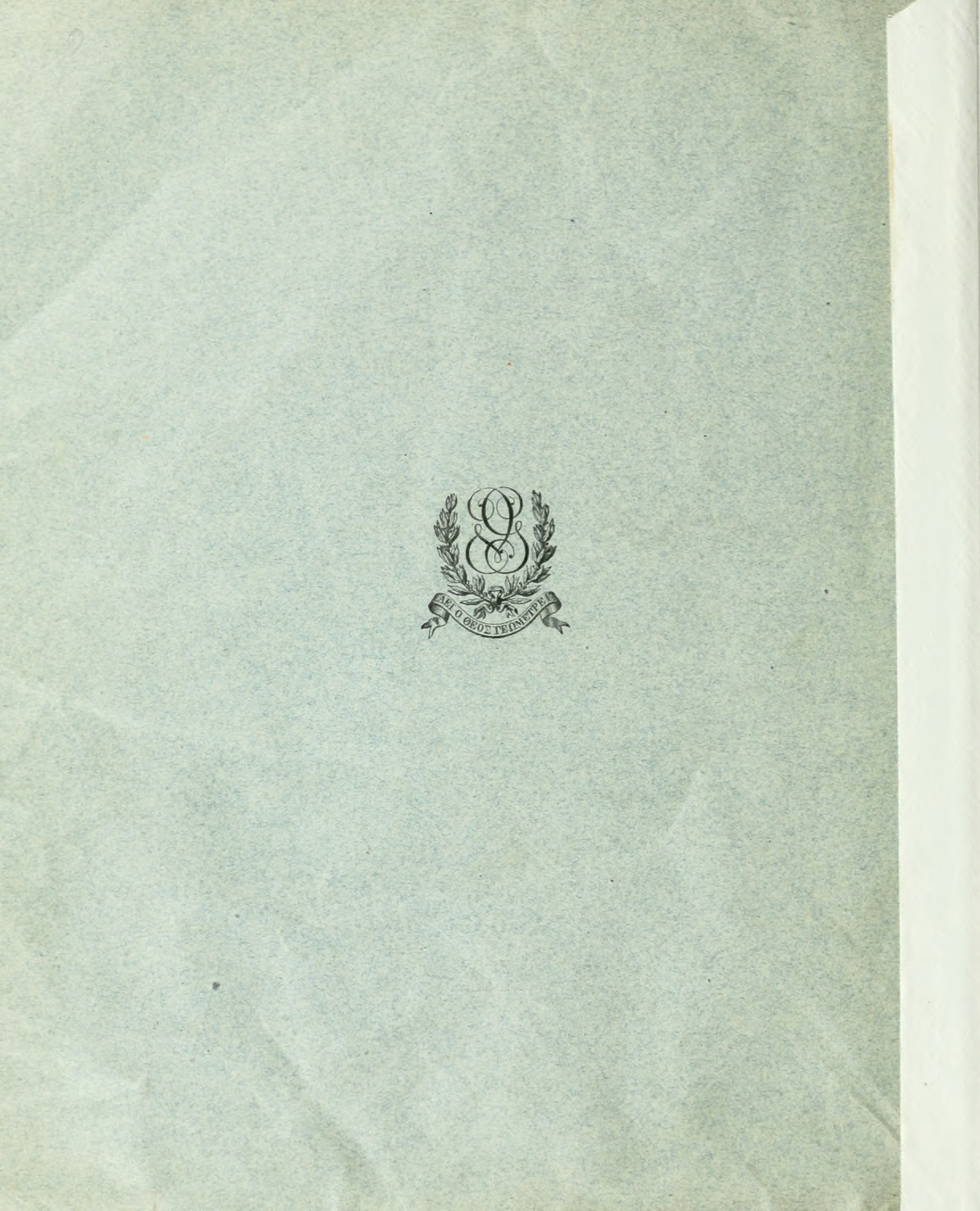
$$\rho = e^{m\omega}\sin n\omega, \qquad \frac{d^i\rho}{d\omega^i} = (m^2+n^2)^{\frac{i}{2}}e^{m\omega}\sin\left(n\omega + i\,\text{arc tang}\,\frac{n}{m}\right),$$

qui jouit de la propriété d'être semblable à sa développée, et pour laquelle les intégrations pourront de même s'effectuer par les moyens ordinaires.

(*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,*
t. CXV, séance du 21 novembre 1892.)

TABLE DES MATIÈRES.

43679 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, Quai des Grands-Augustins.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

13-8-75